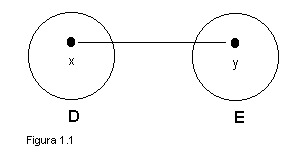
**Series de Fourier**

**1.1Clasificación de funciones**

**DEFINICION:** Una función ƒ de un conjunto ***D*** a un conjunto ***E*** es una correspondencia que asigna a cada elemento  *x* de ***D*** un elemento único *y* de ***E***.

Aveces se ilustran las correspondencias con diagramas como el de la Figura 1.1, en los que los

Conjuntos ***D*** y ***E*** quedan representados por puntos dentro de ciertas regiones en el plano. La flecha indica que ***y*** es el elemento de ***E*** que corresponde al elemento ***x*** de *D*. Los conjuntos pueden tener elementos en común. De echo, muchas veces ***D*** = ***E***.



La figura indica que a cada x en D le corresponde uno y solo un y en E, es decir, dado x, se tiene que y es único. Sin embargo, a varios elementos de D les puede corresponder un mismo elemento de E.

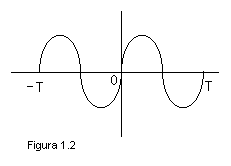
En general, D y E serán conjuntos de números. Por ejemplo, si D y E son conjunto de los números reales, a cada numero real x se le puede asignar su cuadrado x². Así, a 3 se le asigna 9, a -5 se le asigne 25, a 5 se le asigna 25, y a 2 se le asigna 4, esto es una correspondencia de R a R.

**1.1.1Funciones periódicas, definición y gráficas**

**DEFINICION:** Una función ƒ se llama periódica si esta definida para todo t real y para algún

Umero positivo T, ƒ (t + T) = ƒ (t) para todo t.

El numero T se llama el periodo de ­ƒ. El periodo mínimo de ­ƒ se llama periodo principal o periodo fundamental de ­ƒ. Por ejemplo, sen (t + 6PI) = sen (t) para todo t. Por lo tanto 6PI es un periodo de la función seno. Sin embargo, el periodo principal de la función seno es 2PI ya que sen (t + 2PI) = sen (t) para todo t y 2PI es el mínimo numero con esta propiedad. Geométricamente esto significa que la gráfica de ƒ se repite cuando las abscisas de los puntos toman valores en intervalos sucesivos de amplitud T.



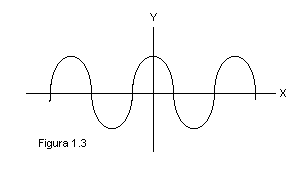
En la Figura 1.2 se muestra una función periódica con periodo T,

**1.1.2Funciones pares e impares, definición y gráficas**

**DEFINICION:** Sea ƒ una función tal que siempre que x este en el dominio D, - x también esta en D.

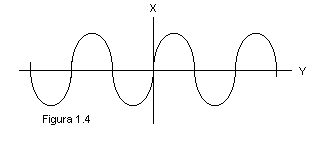
1. ƒ es par si ƒ (-x) =- ƒ(x) para todo x en D.
2. ƒ es impar si ƒ (-x) = - ƒ(x) para todo x en D.

La gráfica de una función par siempre es simétrica con respecto al eje y.



En la figura 1.3 se puede observar la gráfica del coseno que es simétrica con respecto al eje y, es decir, que tiene los mismos valores en el eje y para cos(x) que para cos(-x).

La gráfica de una función impar siempre es simétrica con respecto al origen.



En la figura 1.4 se puede observar la gráfica del seno que es simétrica con respecto al origen, es decir, que tiene los mismos valores para sen (-x) que para -sen(x).

**1.2Conceptos y definición de Serie de Fourier**

Muchas funciones conocidas pueden desarrollarse en series infinitas e integrales que contienen funciones trigonométricas. Esta idea es importante al modelar muchos fenómenos de la física, la ingeniería, la computación y la topografía asistida por computadora.

Sea ƒ (t) una función periódica con periodo T, la cual puede representarse por una serie trigonométrica.



Entonces:

A esta serie se le llama "serie trigonométrica de Fourier".



Una serie alternativa de la serie trigonométrica de Fourier es:



Si tenemos que:



Entonces:



Reescribiendo tenemos que:



Por lo tanto



La expresión para la serie de Fourier es una representación de funciones periódicas que se ve como la suma de componentes sinosoidales que tienen diferentes frecuencias.

La componente sinosoidal de frecuencia

Se denomina la enésima frecuencia.



La primera armónica se le conoce como la componente fundamental.



Los coeficientes Cn y los ángulos Øn se conocen como las amplitudes armónicas y ángulos de fase respectivamente.

FUNCIONES ORTOGONALES

Un conjunto de funciones Øn(t) es ortogonal en un intervalo a <t<b si para cueles quiera de dos funciones Øn(t) y Øm(t) € Øv(t) se cumple lo siguiente:



Considérese el ejemplo de las funciones sinosoidales.

a)



b)



c)



Si utilizamos las siguientes identidades trigonométricas:

:



Entonces



d)



Si utilizamos las siguientes identidades trigonométricas.



Entonces sí:



e)



Si utilizamos las siguientes identidades trigonométricas



Entonces



Si la serie de Fourier es:



El cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier se puede realizar de la siguiente manera:



**1.2.3 Definición de Serie de Fourier trigonométrica**

Si la serie de Fourier es:

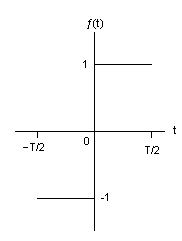


El cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier se puede realizar de la siguiente manera:



NOTA: El  es el valor promedio de ƒ (t) durante un periodo. Y el valor de 

EJEMPLO: Encontrar la serie de Fourier para la función ƒ (t) definida por:



Si sabemos que 

Entonces:



Si n es par entonces es igual a cero

Si n es impar entonces sabemos que 



En esta función  y  porque es una función impar.

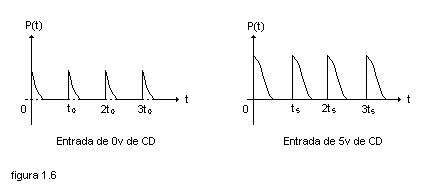
La serie de Fourier para esta función es:



**1.2.4 Determinación de la Serie de Fourier de señales eléctricas**

En algunos sistemas de telemetría es necesario producir una onda sinusoidal con una frecuencia que está relacionada con el voltaje de una corriente de manera lineal. Por ejemplo, podemos necesitar que la salida de un oscilador sea 370 Hz (hertz o ciclos por segundo). Cuando se apliquen 0 voltios de corriente directa (CD) y después que varíe linealmente hasta 430 Hz cuando la entrada se eleve a 5 voltios de corriente directa.

El problema es que la frecuencia de un oscilador de onda sinusoidal no puede cambiarse mucho simplemente con una señal eléctrica. Usualmente, estos osciladores operan tomando una oscilación sinusoidal natural de otro circuito inductor-capacitor o de un cristal Entonces (Por ejemplo, al girar la perilla de sintonía de un radio se está cambiando el valor de un capacitor en un circuito oscilador inductor-capacitor) Lo que se necesita en este caso es la capacidad de cambiar la frecuencia de salida hasta en 7.5% hacia cualquier lado de la frecuencia fundamental utilizando únicamente una señal eléctrica.

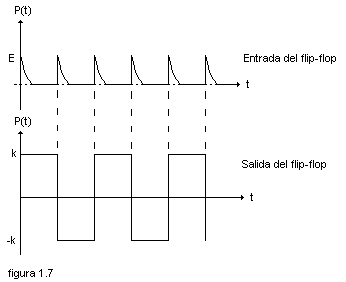


En la figura 1.6 se muestra la salida de un generador de pulsos en 0v y 5v.

Estudiaremos ahora como se hace esto. Empezaremos con un generador de pulso capaz de producir pulsos periódicamente (el mismo tiempo entre pulsos) y con la capacidad adicional de poder cambiar significativamente este periodo con un cambio en el voltaje de entrada. Esto es fácil de hacer si no nos importa la forma de los pulsos. Ahora tomamos la salida del generador de pulsos y la ponemos en un flip-flop con una salida que siempre tiene uno de dos voltajes, digamos, k y -k.

Si la salida es de k voltios, se mantendrá así hasta que reciba un impulso de entrada. En este momento, cambia de estado y su salida cae a -k voltios hasta que llegue el siguiente pulso. Como el tiempo entre los pulsos es contante, la salida del flip-flop será una onda cuadrada de amplitud k y Su frecuencia será de la mitad de la del generador de pulsos. Un aumento en el voltaje en el generador de pulsos hace que aumente su frecuencia, incrementándose la frecuencia de la onda cuadrada. Por lo tanto, es posible producir una onda cuadrada con una frecuencia que puede cambiarse con un voltaje de entrada.

Lo que realmente se necesita es una onda sinusoidal con una frecuencia que pueda cambiarse de esta manera. Como la onda la onda cuadrada es periódica y satisface que en cada punto de un periodo las derivadas por la izquierda y por la derecha existen (La serie de Fourier converge al promedio de los limites izquierdo y derecho la función), sabemos que esta onda cuadrada es una suma de ondas sinusoidales una de las cuales es la que queremos.



Supongamos que queremos una onda sinusoidal con frecuencia . Constituimos una onda cuadrada con frecuencia. La onda cuadrada de salida del flip-flop es:



Y por lo tanto:



La serie de Fourier que representa a ƒ (t) es:

Si sabemos que  entonces.



Por lo tanto el coeficiente 

Si sabemos que  entonces.



Por lo tanto el coeficiente 

Si recordamos las propiedades de una función impar, notaremos que la función que estamos analizando es una función impar, por eso los coeficientes  y  son igual a cero.

Si sabemos que  entonces



Si n es un número par él  y si n es un número impar entonces:

Con 



La serie de Fourier que representa a ƒ (t) es:



Para los propósitos actuales, solo queremos el primer término sinusoidal, de modo que eliminaremos las armónicas más altas colocando la señal de onda cuadrada en un filtro de frecuencias bajas. Este es simplemente un circuito que permite el paso a frecuencias bajas prácticamente ilesas mientras que atenúa las frecuencias altas. Para ver como se hace esto, consideraremos un ejemplo específico. Supongamos que queremos producir una onda sinusoidal de 400 hertzios y queremos poder cambiar esta frecuencia eléctricamente desde 370 hertz hasta 430 hertz sin distorsionar la señal. Supondremos que el valor de la amplitud de salida no es critica (dentro de límites razonables); esto es cierto en la práctica. Lo que es crucial es la frecuencia de salida.

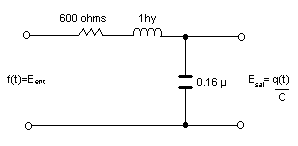
Empezaremos con un generador de pulsos con una frecuencia que pueda variar de 740 a 860 hertz con un cambio en la entrada de 0v a 5v de CD. Hacemos una onda cuadrada poniendo estos pulsos en un flip-flop. La frecuencia de la onda cuadrada será de la mitad de la del pulso del generador y por lo tanto variara de 370 a 430 hertz. Ahora tenemos la onda cuadrada superior con , esto es:



Y . Esta función tiene serie de Fourier.



Si tomamos esta señal como entrada a un filtro pasa bajas inductor-capacitor, debemos calcular q (t)/C, que a Su vez debemos conocer q (t).



La ecuación diferencial para este circuito es:



Recordemos que  y ponemos ƒ (t) y los valores de L, R y C en esta ecuación para obtener:



Como queremos únicamente la solución estacionaria, desechamos la solución homogénea y consideramos las ecuaciones diferenciales no homogéneas.



La estrategia es resolver cada una de estas ecuaciones diferenciales y sumar las soluciones para encontrar la representación en serie de Fourier de la carga del capacitor q. Así, considera



Donde n es cualquier entero positivo impar y . El subíndice n se introduce para recordarnos que esta es la enésima ecuación y debemos sumar las soluciones.

**1.3 Interpretación geométrica de la Serie de Fourier**

**1.3.1 Condiciones de Dificulte**

Se supuso que las funciones dadas se podían interpretar mediante una serie de Fourier. Pero ahora se debe investigar la convergencia de la serie de Fourier de una función ƒ (t).

El argumento que motiva la definición de los coeficientes de Fourier dependía de poder intercambiar una serie con una integral, un paso que en general no es válido. Se tendrá que saber las condiciones sobre ƒ (t) que nos permitan determinar la suma de la serie de Fourier de ƒ (t) en un intervalo.

Recordemos que ƒ (t) es continua en pedazos si:

1.-  y  son finitos.

2.- ƒ(t) es continua en todos los puntos de [a,b] excepto posiblemente un numero finito de ellos.

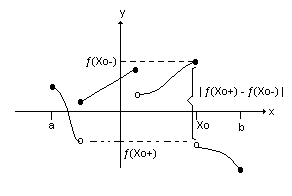
3.- En los puntos (a,b) donde ƒ (t) es discontinua, la función tiene límite izquierdo

y derecho finitos.

La siguiente figura muestra la gráfica de una función que es continua a pedazos. En los puntos de (a,b) donde la función es discontinua, la gráfica tiene discontinuidades de salto. La magnitud del salto en Xo es la diferencia entre el límite izquierdo y derecho en ese punto:



Esta es la distancia entre el extremo izquierdo y derecho de la gráfica en Xo.



Se denotaran el límite izquierdo y derecho de la siguiente manera:



Si estos límites existen y son finitos, también existen las derivadas tanto por la izquierda como por la derecha aunque la derivada de la función no exista.

Se enunciaran aquí las condiciones, conocidas como condiciones de Dirichlet, baja las cuales es posible la representación en serie de Fourier de una función dada ƒ(t).

1.- La función ƒ (t) tiene un numero finito de discontinuidades en un periodo.

2.- La función ƒ (t) tiene un numero finito de máximos y mínimos en un periodo.

3.- La integral del valor absoluto de ƒ (t) en un periodo es finita; es decir,



Si dice que una función ƒ (t) es continua por tramos en el intervalo finito [-T/2,T/2] si satisface las condicione (1) y (2).

Si  y  son las sucesiones de los coeficientes de ƒ(t), entonces:



Si se tiene que:



Puesto que le serie del miembro izquierdo es convergente entonces es necesario que:



lo cual implica que 

Ejemplo: Demostrar que si ƒ (t) es una función continua por tramos la integral del valor absoluto de ƒ (t) es finita en el intervalo -T/2 < t < T/2, entonces:



Los coeficientes de Fourier existen, puesto que la integral del valor absoluto de ƒ (t) es finita en el intervalo [T/2,-T/2].



De donde



**1.4 Serie de Fourier compleja**

La representación de una función periódica como una serie de Fourier, implica que la especificación de sus coeficientes determina unívocamente la función. Ahora desarrollaremos la forma compleja de la serie de Fourier que nos proveerá de un contexto natural desde el cual podemos considerar muchos resultados del análisis de Fourier incluyendo la transformada de Fourier.

**1.4.1 Definición de Serie de Fourier compleja**

En muchas aplicaciones de las series de Fourier, es conveniente expresar estas series en términos de los exponenciales complejos .

Si se considera la serie de Fourier de una función periódica (t), como



Donde , el seno y el coseno se puedan expresar en términos de los exponenciales como



Sustituyendo esto en la serie de Fourier tenemos que:



Teniendo en cuenta que , se puede expresar como:



Si se hace



Entonces:



A esta ecuación se le denomina serie compleja de Fourier de ƒ (t).

Los coeficientes  se pueden evaluar fácilmente en términos de  y 



Si ƒ (t) es real, entonces , donde \* indica el complejo conjugado.

Entonces:



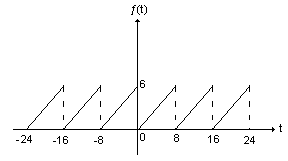
A esta ecuación se le denomina serie compleja de Fourier de ƒ (t)

**1.4.2 Determinación de la Serie compleja de señales**

Determinaremos la serie de Fourier compleja de la función serrucho ƒ de periodo 8 definida por:

 para 0 < t < 8





Aquí tenemos  y . Si 

Si sabemos que la serie de Fourier compleja es



Con



Entonces



Si utilizamos el hecho de que . Entonces



Y por ultimo



La serie de Fourier compleja es:

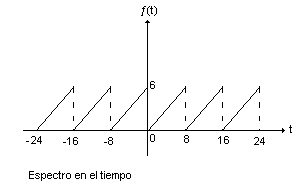


**1.4.3 Espectros**

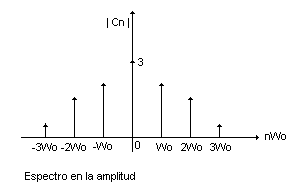
Los espectros de una función ƒ (t), es la representación grafica de esta ya sea en el dominio del tiempo, frecuencia, amplitud o fase.

Ejemplo:

En el problema anterior se determino la serie compleja de Fourier a partir de su grafica en el tiempo.



y se puede obtener su espectro de amplitud.



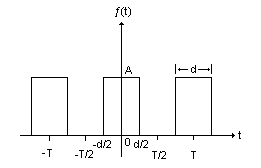
**1.4.4 Representación de señales periódicas en el dominio del tiempo y la**

**Frecuencia**

La representación de de los coeficientes complejos  versus la variable discreta , especifica la función periódica ƒ (t) en el dominio de la frecuencia, así como ƒ (t) versus t especifica la función en el dominio del tiempo.

Ejemplo:

Encontrar los espectros de frecuencia para la función periódica ƒ (t), que se muestra, la cual consta de un tren de pulsos rectangulares idénticos de magnitud A y duración d.



La función ƒ (t) se puede expresar como:



Con  se tiene



Es obvio que  es real y por consiguiente el espectro de fase es cero. El espectro de amplitud se obtiene dibujando  versus la variable discreta . Esta ecuación tiene solamente valores para la frecuencia discreta ; es decir, el espectro de frecuencia es una función discreta y existe solamente cuando



Se debe considerar el espectro para algunos valores específicos de d y T; para d = 1/20 y T = 1/4 de segundo,



Por consiguiente, el espectro de amplitud existe cuando

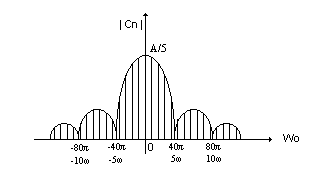


Puesto que d/T = 1/5, el espectro de amplitud se hace cero en el valor en el valor de  para el cual

 O  

es decir, cuando 

En el caso siguiente se considerara d = 1/20 y T = 1/2 se segundo, y



**1.4.5 Espectro de fase, amplitud y frecuencia**

La grafica de la magnitud de los coeficientes complejos  versus la frecuencia w (frecuencia angular), se denomina espectro de amplitud de la función periódica ƒ (t). La grafica del Angulo de fase  de  versus w se denomina espectro de fase de ƒ (t). Puesto que el índice n tomo solamente valores enteros, los espectros de amplitud y fase no son curvas continuas sino que aparecen en la variable discreta ; por lo consiguiente se denomina como espectros de frecuencia discreta o espectros de líneas. La representación de de los coeficientes complejos  versus la variable discreta , especifica la función periódica ƒ (t) en el dominio de la frecuencia, así como ƒ (t) versus t especifica la función en el dominio del tiempo.

**Unidad II.**

**Transformada de Fourier**

**2.1 Concepto y definición de Transformada de Fourier**

Se ha visto que las series de Fourier constituyen un poderoso instrumento en el tratamiento de diversos problemas que implican funciones periódicas. Puesto que muchos problemas prácticos no involucran funciones periódicas, es deseable desarrollar un método de análisis de Fourier que incluya funciones no periódicas.

**2.1.1 Paso de la Serie de Fourier compleja a la Transformada de Fourier**

Si se supone que ƒ (t) es periódica con periodo T, entonces ƒ (t) se puede expresar como



Donde



Si ahora se considera que a medida que  ,  , entonces se convierte, respectivamente en



En vez de tener armónicos discretos correspondientes a , todo el valor de w es permitido. De esta manera, en vez de  se tiene c (w), y entonces se tiene que



Se observa que



o, puesto que , se tiene



Entonces se convierte en



Esta ecuación muestra que  representa la magnitud infinitesimal de un armónico a la frecuencia angular w. Estos armónicos tienen frecuencias fundamental cero  y están separados por infinitésimos. Aunque | F (w) | versus w se le denomina espectro continuo y a | F (w) | se le denomina generalmente, espectro de magnitud de ƒ (t).

La representación anterior de una función no periódica como suma de exponenciales con la frecuencia fundamental tendiendo a cero, no es concepto fácil de aceptar.

**2.1.2 Definición de Transformada de Fourier**



Es decir, se supone que cualquier función dada tiene dos modos equivalentes de representación: uno en el dominio del tiempo, ƒ (t), y el otro en el dominio de la frecuencia, F (w). La primer ecuación transforma la función ƒ (t) en el dominio del tiempo, a Su función equivalente F (w) en el dominio de la frecuencia y la segunda ecuación invierte el proceso. La primera ecuación analiza la función del tiempo en un espectro de frecuencia y la segunda ecuación sintetiza el espectro de frecuencia para obtener nuevamente la función en términos del tiempo.

La función F (w) definida por  se conoce como la integral de Fourier o la transformada de Fourier de ƒ (t), y la operación de integración se simboliza frecuentemente por 



Análogamente  es el símbolo que se utiliza para indicar la operación inversa o sea, obtener ƒ (t) cuando F (w) está dado



Y ƒ (t) se denomina transformada inversa de Fourier de F (w).Estas dos ecuaciones anteriores se denominan como par de transformadas de Fourier.

La condición para que exista F (w) generalmente está dada por



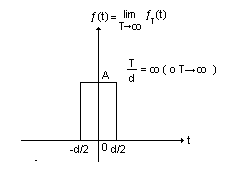
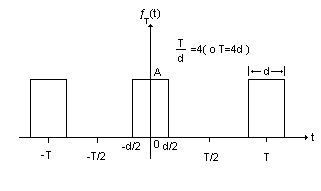
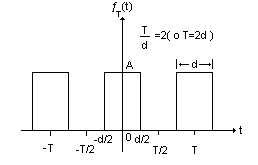
La integral del valor absoluto de ƒ (t) debe ser finita.

**2.1.3 Determinación de la Transformada de Fourier de señales**

**No-periódicas**

Si se comienza con una función periódica  de periodo T, y se hace que T tienda a infinito, entonces la función resultante  deja de ser periódica.

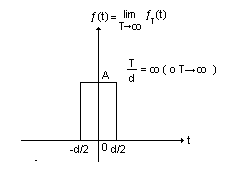
Considerar el tren de pulsos rectangulares



Para , se obtiene la función



Es evidente que ƒ (t) no es una función periódica, Las figuras muestran el proceso de límite a medida que T aumenta y finalmente se hace infinito.



Para , se obtiene la función



Es evidente que ƒ (t) no es una función periódica, Las figuras muestran el proceso de límite a medida que T aumenta y finalmente se hace infinito.

**2.2 Interpretación geometría de la Transformada de Fourier**

**2.2.1 Representación de señales no-periódicas en el dominio del tiempo y la frecuencia**

Ejemplo: El espectro de frecuencia del pulso rectangular periódico ya ha sido hallado, se observa que cuando el espectro discreto de una función periódica con periodo T, se dibuja en función de frecuencia, la distancia entre armónicos adyacentes es la frecuencia fundamental , de este modo, a medida que el periodo T aumenta  disminuye y las líneas en el espectro se acercan unas a otras. En consecuencia, el número de líneas (armónicos) en una banda de frecuencia aumenta.

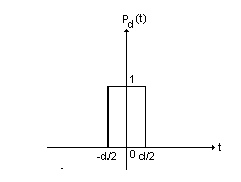
Si se tiene que



Por lo tanto, si el periodo T aumenta, las amplitudes de todos los armónicos disminuyen.

De lo anterior se concluye que en el límite, a medida que T se acerca al infinito, los armónicos se encuentran infinitamente cercanos y son de amplitud infinitesimal, es decir, el espectro discreto se vuelve continuo.

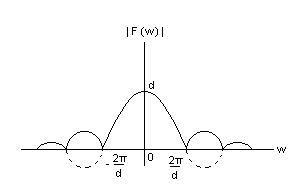
Encontrar la transformada de Fourier del pulso rectangular  definido por:



Se tiene:



La transformada de Fourier del pulso rectangular es:



En esta figura la línea continua es el espectro de magnitud | F (w) |., y la línea punteada es F (w).

**2.3 Propiedades de la Transformada directa de Fourier**

**2.3.1Propiedades de linealidad, analítica y geométricamente**

La propiedad de linealidad establece que: si  y , y  y  son dos constantes arbitrarias entonces:



Demostración



**2.3.2 Propiedad de simetría, analítica y geométricamente**

Esta propiedad establece que si entonces:



Demostración

Se tiene



Cambiando t por - t en la expresión anterior



Ahora intercambiamos t y w



**2.3.3 Propiedad escalar, analítica y geométricamente**

Esta propiedad establecer que si a es una contante real y  entonces:



Demostración

Para a > 0



Si hacemos at = x



Para a< 0



Si hacemos at = x



En consecuencia



**2.3.4 Propiedad de inversión en el tiempo, analítica y geométricamente**

Esta propiedad establecer que si  entonces:



Demostración

Si se sabe que



Entonces haciendo a = - 1



o también



Haciendo - t = x dentro de la integral se obtiene



**2.3.5 Propiedad de desplazamiento en el tiempo, analítica y geométricamente**

Esta propiedad establecer que si  entonces:



Demostración



Haciendo ; por consiguiente



**2.3.6 Propiedad de desplazamiento en la frecuencia, analítica y geométricamente**

Esta propiedad establecer que si  es una constante real y  entonces:



Demostración



**2.3 Transformada inversa de Fourier**

**2.3.1 Definición de Transformada inversa de Fourier**

La función F (w) definida por  se conoce como la integral de Fourier o la transformada de Fourier de ƒ (t), y la operación de integración se simboliza frecuentemente por 



Análogamente  es el símbolo que se utiliza para indicar la operación inversa o sea, obtener ƒ (t) cuando F (w) está dado



Y ƒ (t) se denomina transformada inversa de Fourier de F (w).

**2.5 Aplicaciones de la Transformada de Fourier**

**2.5.1Convolución y correlación**

Sea  y dos funciones dadas. La convolución de  y , está definida por:



La cual se expresa simbólicamente como:



Un caso importante es aquel en el cual:

 Para t < 0, y  para t < 0.

Entonces se convierte en



Algunas propiedades de la convolución son:

Conmutación



Asociativa



La convolución de ƒ (t) con  (impulso unitario) conduce a ƒ (t)



La función



Se conoce como la función de correlación entre las funciones  y . En forma análoga se define



La función de correlación  o  suministra una medida de la similitud o independencia entre las funciones  y en función del parámetro T (el desplazamiento de una función con respecto a la otra). Si la función de correlación es cero para todo valor de T, entonces se dice que las dos funciones no están correlacionadas.

Si  y  son idénticas, entonces la función de correlación



Se denomina función de auto correlación de .

**2.5.2Convolución en el tiempo y en la frecuencia**

El teorema de convolución en el tiempo afirma que , y  entonces:



Demostración

Probar el teorema de convolución en el tiempo.

La trasformada de Fourier de  es:



Cambiando el orden de integración, se tiene que



Por la propiedad de desplazamiento en el tiempo de la transformada de Fourier, se tiene



Sustituyendo, obtenemos



El teorema de convolución en la frecuencia afirma que si  y , entonces



o



Demostración del teorema de convolución en la frecuencia



Sustituyendo  por x e intercambiando el orden de integración, se obtiene



En donde las variables comodines de la integración se han cambiado.

La ecuación anterior también se puede expresar como:



**2.5.3 Correlación en el tiempo**

Como se puede ver la función de auto correlación es una función par de T.

Ahora demostraremos que la correlación de  y  está relacionada con la convolución de  y .

Sea  de la definición de convolución, esto es,



Se obtiene



Cambiando la variable t por T, se tiene



Cambiando nuevamente la variable x por t, se obtiene



De donde



Si  y , demostrar que



Así mismo, si  es real, demostrar que



Si sabemos qué , entonces , de tal manera que si



Aplicando ahora el teorema de convolución en el tiempo



A esta relación se obtiene:



o



Análogamente se obtiene



o



y



Si ƒ (t) es una función real de t, entonces . De donde,



o



Si ƒ (t) es una función real de t.

**2.5.4 Espectro de densidad de energía de una señal**

Si se sigue que la transformada de Fourier de la función de auto correlación  conduce al espectro de energía  de . En otras palabras, la función de auto correlación  y la densidad espectral de energía , constituyen un par de transformadas de Fourier, es decir:



Este resultado se conoce como el teorema de Wiener - Khintchine

**2.5.5 Teorema de Parseval**

Para poder deducir el teorema de Parseval se tiene que:



y



es decir



Solución:



Haciendo T = 0, se obtiene



De igual manera:



Por consiguiente:



A esta ecuación se le conoce como el teorema de Parseval

**2.5.6 Espectro de densidad de potencia de una señal periódica**

Tomando el concepto de energía de ƒ (t) se supone que el contenido de energía es finito, es decir,



Para tales funciones, la potencia promedio en el intervalo T se aproxima a cero a medida que T se aproxima a infinito; de esta manera, se tiene



En relación con los cálculos de ruido, es necesario considerar señales sin contenido finito de energía. En este caso, la potencia promedio de ƒ (t) es la cantidad



Cuando este límite existe, la cantidad

Se denomina espectro de potencia o densidad espectral de potencia de la función ƒ (t).



Si solo se especifica la densidad espectral de potencia de la función ƒ (t), no se puede conocer Su forma de onda, porque solo se conoce el espectro promediado en el tiempo. Las señales especificadas de esta manera se denominan señales al azar. Las señales al azar generalmente se describen en términos de sus propiedades estadísticas.

La densidad espectral de potencia (o simplemente densidad espectral) de la función ƒ (t) se define generalmente como la transformada de Fourier de la función de auto correlación promedio de ƒ (t). De esta manera, se define



Demostración de que la potencia promedio total (o valor cuadrático medio) de una función ƒ (t), está dada por



Donde 

Si



Ahora bien, si se sabe que



entonces



comparando, tenemos que:



Esta ecuación establece que la potencia promedio total (o valor cuadrático medio) de una función ƒ (t), está dada por la integral de P (w) a lo largo de todo el intervalo de frecuencia. Por esta razón la cantidad P (w) se denomina espectro de potencia o densidad espectral de potencia de ƒ (f).

Ejemplo: Hallar la densidad espectral de potencia de una función periódica ƒ (t) cuyo periodo es T.

Supóngase que la serie de Fourier de la función ƒ (t), está dada por



Y con una función de auto correlación de ƒ (t) dada por



Si se toma la transformada de Fourier de , se obtiene



Por lo tanta, P (w) consta de una serie de impulsos localizados en las frecuencias armónicas de ƒ (t). Cada impulso tiene un valor igual a la potencia contenida en esa componente frecuencial y es una clara medida de distribución de potencia en ƒ (t).

**2.6 Transformada rápida de Fourier (FFT)**

**2.6.1 Definición de transformada rápida de Fourier**

La transformada rápida de Fourier (FFT) no es en sí una transformación, sino que es un algoritmo que ayuda a reducir el tiempo requerido para evaluar la transformada de Fourier discreta. De hecho, hay varios algoritmos a los cuales se les aplica el nombre de transformada rápida de Fourier.

Consideremos la transformada de Fourier discreta como:



En donde hemos sustituido n/NT por n y kT por k eliminando el factor T para simplificar la discusión. Si hacemos , entonces



Para n=0, 1, 2,3,......., N-1

**2.6.2 Algoritmo de la FTT**

Queremos un procedimiento para reducir el trabajo necesario para calcular F(n). El procedimiento particular que describiremos se llama la TRF base-2. En este método, suponemos que N es una potencia de 2, digamos  para algún entero positivo "y".   
Para comenzar con un caso sencillo hacemos y = 2 y elegimos simplemente N = 4.

Por lo tanto, queremos determinar los valores de F(n) para n = 0, 1, 2,3. Tenemos



Escribimos este sistema de ecuaciones en forma matricial como



Como W y cada ƒ (k) puede ser complejo, necesitaremos aproximadamente dieciséis, o , multiplicaciones complejas y doce, o N(N-1), sumas complejas para encontrar los N valores de F que buscamos. Generalmente, cuando estimamos el tiempo de cálculo necesario para realizar operaciones aritméticas, la principal consideración es el número de multiplicaciones requeridas para efectuar el trabajo. Las operaciones como sumar, guardar, leer consumen mucho menos tiempo que las multiplicaciones.

Observemos que, como , podemos calcular el producto de por cualquier numero sin hacer ninguna multiplicación. Si deseamos seguir la pista de las posiciones de los registros de  en la matriz, podemos reducir el número de multiplicaciones complejas a no más de . Las transformaciones rápidas de Fourier son métodos que exploran ideas como estas al reducir al reducir el número de multiplicaciones requeridas para encontrar F (0), F (1), F (2),....., F (N-1).



Ahora factorizamos la matriz NxN en dos matrices de NxN y escribimos esta ecuación como:



El producto de las dos matrices, con el segundo y tercer renglones intercambiados.



Para determinar , debemos efectuar una multiplicación y una suma complejas:



(No hemos reducido a  por 1 porque cuando generalicemos estas ideas, este término tendrá usualmente otro exponente) También se necesita una multiplicación y una suma complejas para calcular 



Para  necesitamos



Por último necesitamos



**3.1 Concepto y definición intuitiva de Función Generalizada**

**3.1.1 Generar la Función Delta de Dirac**

La función impulso unitario , conocida también como función delta de Dirac, se puede definir de varias maneras. Generalmente se expresa mediante la relación,



La ecuación anterior indica que  es cero excepto en t = 0, donde se hace infinita de tal manera que siempre será igual con uno.

La función delta también se puede definir en términos de las propiedades de sus integrales solamente.

**3.1.2 Definición de la Delta de Dirac**

Si se supone que la función  (llamada función de prueba) es una función continua, que se anula fuera de algún intervalo finito, entonces la función se define como una función simbólica de relación,



La expresión anterior no tiene el significado común de una integral definida, sino que la integral, así como la función , están definidas por el número  asignado a la función .

Con la interpretación anterior, resulta que  se puede tratar como si fuera una función ordinaria, excepto que nunca se hablara del valor de , pero sí de los valores de las integrales en que aparece .

**3.2 Transformada de Fourier de Funciones generalizadas**

**3.2.1 Propiedad de muestreo de la Delta de Dirac**

El teorema de muestreo uniforme en el dominio del tiempo afirma que si una función del tiempo, ƒ (t), no contiene componentes de frecuencias superiores a  ciclos por segundo, entonces ƒ (t) se puede determinar por completo mediante sus valores separados por intervalos uniformes menores de  segundos.

El teorema del muestreo se puede probar con ayuda del teorema de convolución en la frecuencia.

Como ƒ (t) no tiene componentes frecuenciales superiores a  ciclos por segundo, entonces ƒ (t) es una función de banda limitada, lo cual significa que:



Para



Consideremos ahora a , una función muestreada definida por el producto de la función ƒ (t) y , que es una función periódica de impulsos unitarios.

Recordando la definición de , y sus propiedades, se tiene



La ecuación anterior muestra que la función  es una sucesión de impulsos localizados a intervalos regulares de T segundos y cuyos valores son iguales a los de ƒ (t) en los instantes del muestreo

Si sabemos que



De acuerdo con el teorema de convolución en la frecuencia, se tiene

Sustituyendo , se obtiene



Si sabemos que



Por consiguiente el resultado se puede expresar como:



La ecuación anterior muestra que la transformada de Fourier de , se repite cada  rad/se., Se debe observar que F (w) se repite periódicamente sin solaparse en tanto que , o , es decir



Por consiguiente, mientras que se tomen muestras de ƒ (t) a intervalos regulares menores de  segundos, el espectro de Fourier de  será una replica periódica de F (w), y contendrá toda la información acerca de ƒ (t).

**3.2.2 Transformada de Fourier de Funciones generalizadas**

Sea  y , se establece la ecuación de Parseval



Según la transformada de Fourier, se tiene



Entonces



Intercambiando el orden de integración, se tiene que



Y como se puede cambiar el símbolo del variable comodín, se tiene



Por lo tanto es obvio que:



Puesto que  y , podemos decir que



De modo que es posible extender esta relación para definir la transformada de Fourier de una función generalizada

Sea  una función de prueba, entonces

Realmente existe, y la transformada de Fourier F (w) de una función generalizada ƒ (t) está definida por la relación

